学校编码：10384　　　　分类号__密级__
学号：19020071152076　　　　UDC__

硕 士 学 位 论 文

有市场摩擦的无套利定价

Asset Pricing in Frictional Markets

靳丽

指导教师姓名：张顺明 教授
专 业 名 称：应 用 数 学
论文提交日期：2010 年 4 月
论文答辩时间：2010 年　 月
学位授予日期：2010 年　 月

答辩委员会主席：__
评　　阅　　人：__

2010 年 4 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范(试行)》。

另外，该学位论文为(　　　　　　　　　　　　　　)课题(组)的研究成果，获得(　　　　　　　　　　)课题(组)经费或实验室的资助，在(　　　　　　　　　)实验室完成。(请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。)

声明人(签名)：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文(包括纸质版和电子版)，允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

(　　)1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

(　　)2.不保密，适用上述授权。

(请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。)

声明人(签名)：

年　　月　　日

摘 要

本文前半部分是关于无套利定价理论的综述及定价算子和摩擦函数的一些解释说明，主要说明了完美市场和有交易成本摩擦市场中的无套利定价理论，并就这两种不同的市场分别给出一系列等价条件并给予证明。本文后半部分是创新之处，研究了金融证券市场中无套利和渐近无套利，而这里对无套利和无套利成本系统的数学推理是基于局部凸拓扑空间和可分 *Banach* 空间。渐近无套利和渐近无套利成本系统也相应的在这两种空间中被建立。在本文中我们还探讨了有摩擦证券市场的一个局部凸拓扑空间中的（强和弱）无套利成本系统及（强和弱）渐近无套利成本系统。

在本文中，我们利用凸分析、线性规划、非线性规划等数学工具，对经典无套利理论进行了深入的分析研究，在不同的摩擦条件下对无套利进行了探索，所得结论更适用于现实金融市场的情形。 文章分析了包括无交易成本、有成比例交易费、和买卖价差及税收等条件下的无套利模型，运用优化理论和凸分析方法，得到一些等价条件；在复杂摩擦市场中研究了大和小两类投资者，并对定价算子和摩擦函数给予了一些说明。

本文的研究结果表明在局部凸拓扑空间和可分 *Banach* 空间中，无套利定价理论和渐近无套利定价理论成立

关键词：局部凸拓扑空间；可分 *Banach* 空间；摩擦市场；无套利；渐近无套利

Abstract

This paper studies arbitrage-free asset pricing theory in perfect market and markets with transaction costs，and in this two different markets series of equivalent conditions are given and proved. This latter part is the innovation of this paper research. It studies arbitrage-free and approximately arbitrage-free asset pricing in financial security markets.The mathematical formulation is based on a locally convex topological space and a separable Banach space for arbitrage-free and approximately arbitrage-free cost system. The arbitrage-free and approximately arbitrage-free asset pricing theorems are established.In this paper, we consider (weakly and strongly) arbitrage-free cost system and (weakly and strongly) approximately arbitrage-free cost system in a locally convex topological space with frictional security markets.

In this paper, we use convex analysis, linear programming, nonlinear programming and other mathematical tools, to analyze the classical no-arbitrage theory and study the frictional markets in different conditions which is more applicable to real financial market situation. Arbitrage-free model analysis in this paper including without transaction costs, with proportional transaction costs , with the bid-ask spread and tax, and under the other conditions 。 The use of optimization theory and convex analysis, geting some equivalent conditions; We study two types of investors, small, and large in the complex frictional markets， and give some explain of the friction function and the pricing operator。

The study results show that the arbitrage-free and approximately arbitrage-free asset pricing theorems in the locally convex topological space and the separable Banach space is true。

Keywords： locally convex topological space; separable Banach space; frictional markets; arbitrage-freeness; approximate arbitrage-freeness

目 录

Table of Contents

第一章 绪 论

1.1 研究背景

1.1.1 新古典金融中的无套利

在完全市场中，无套利机会等价于存在一个定价算子。市场的完全性可以这样来描述，对于市场可能出现的各种情况，是否具备足够数目的“独立的”金融工具来进行完全的套期保值，从而转移风险。如果具备足够多的此类金融工具，则市场是完全的，否则是不完全的。

在新古典金融中，无套利资产定价理论是至关重要的。金融中最基本的一个结论是在无交易成本的市场中，无套利等价于存在一个价格算子。很多的现代价值理论及其应用都基于 Ross（1978）首先给出的这个基本等价关系。然而，它的应用实际取决于由于交易成本造成的与完美市场的偏离度。Black &Scholes (1973), Merton (1973), Cox & Ross (1976),and Ross (1978)开始研究套利。Harrison & Kreps (1979)进一步正式确立套利依据，从而提供了一个正式的资产定价理论。 Harrison & Kreps (1979)开始了多期证券市场中鞅和套利的研究，他们介绍了一个不确定的两期经济中的套利的一般理论，然后扩展到多期证券市场模型和连续时间证券市场模型。Kreps (1981)研究了有无限多商品经济中的套利和均衡，并提出了在有无穷维商品空间经济中的“套利”的抽象分析。Harrison & Pliska (1981)研究了在连续交易中的鞅和随机积分理论。Dalang, Morton &Willinger (1990)在随机证券市场模型中，研究了等价鞅测度和无套利。Back &Pliska (1991)研究了无限状态空间下的资产定价基本定理，并给出了套利的一些等价关系。Clark (1993, 1994, 2000)分析了消除套利机会的三个关键原理：套利游离度，近似套利游离度，没有免费的午餐。Jacod &Sgiryaev (1998)考察了局部鞅和离散情况下的基本资产定价定理。近年来的工作主要是把 Harrison& Kreps (1979), Kreps (1981), and Ross (1978)的结果拓展到有市场摩擦和（或）交易成本的经济中去，摩擦市场吸引了该领域的若干著作的高度关注。Prisman (1986) and Ross (1987)拓展套利理论到有收入税的经济中。Chen (1995)研究

了金融创新的激励作用，且在同一时间研究了复制套利估值方法的效用，在有摩擦的经济中（摩擦是指存在限制）。Jouini &Kallal (1995)得出在证券市场模型中无套利的含义，在那里，证券交易受 short-sales 的限制，借款和贷款利率不同。并表明，一个证券的价格体系无套利当且仅当存在一个计价单位和一个等价概率测度，使得证券交易的标准化价格过程（由计价单位计量的）是一个上鞅。Jouini & Kallal (1995)把这一含义扩展到有买卖价差的动态证券市场中。无套利等价于存在至少一个等价概率测度，使得能够把交易证券的位于 ask price processes 和 bid price processes 之间的一些过程转换成一个鞅。Pham &Touzi (1999)在存在摩擦的离散时间金融模型中，讨论了强无套利的特征问题，并在一个非退化的假设下，扩展了资产定价基本定理。摩擦是由采购和销售的证券的交易成本率来描述的。

1.1.2 有摩擦成本交易市场中的无套利研究范式的兴起

金融中最基本的一个结论是在无交易成本的市场中，无套利等价于存在一个价格算子。Ross（1978）首先给出的这个基本等价关系。Garman and Ohlson（1981）把这个基本等价关系从完美市场扩展到有比例交易成本的市场中。然而，在假设交易成本不存在或成比例时，现代价值理论既忽略了巨额自营商立即观察到的递增的边际市场效用成本，也忽略了小投资者面临的递减的边际零售佣金成本。见Schwartz（1988），（1991）和 Hasbrouck&Schwartz（1988）。Garman and Ohlson(（1981），P.273)写道：我这个假设忽略了任何与股票交易数目有关的规模发行，在这个意义上交易成本在股票交易数目上是线性的。这个假设是至关重要的并且看起来很难放宽。

在实际的市场中，交易成本包括市场效用成本和零售佣金成本的总和。如果投资者卖掉他们并不拥有的证券，那么他们仍发生短期借款成本。价格、市场效用成本和短期借款股票佣金的总和可从投资者的资本成本与投资者支付抵押品（经纪人短借股票给投资者被公告的抵押品）的最低利率的差额中得出。所有的投资者在任何给定的时刻为了一个任意给定规模的交易或短期借款与证券支付相同的市场价格和市场效用成本。相反的，佣金（发生在买、卖、和短期借款上的）是商定的且依赖于交易的年交易额和投资者的其他交易实际。

为了给现代交易成本建模，给出关于两类投资者：大的和小的的一些明显的

假设。大的投资者定义为那些在在经纪行的大型交易桌上经常做大的证券交易的投资者。大的交易者通常用经纪行的交易桌做协议，为了执行他们的交易有一个统一的制度上的佣金率（可以应用于任意规模的交易）。因此，大投资者为交易一个给定的股票而支付的佣金是同其交易股票的数目成比例的。但是一个给定股票的边际市场效用成本随着交易数目的增多而上升。大的投资者报告其短期借贷成本在形式上类似于市场效用成本，因此，大投资者为一个给定的股票支付的总的交易费用假设关于交易数目是凸的。因为在所有的金融市场中对所有的投资者（大的和小的）的约定是在一个交易上的交易成本等于在每个独立的证券上的交易成本之和，交易成本函数在n-维交易股票向量上是凸的。

相反，小的投资者定义为那些使用零售经纪业务公司并因此对一个给定的股票面临零售佣金成本（随着交易规模的增大而降低）的投资者。他们的许多交易足够小以致于其零售佣金清单的递减的边际成本占优于市场效用成本的凸性。因此，他们总的交易成本显现递减率，对任意给定的交易甚至一些特殊的规模。因此，在没有假设总的交易成本的凸性的条件下，不能使用Prisman（1986）（1990）和 Kate&Prisman（1991）的结论。在这个分析中，缺少凸性是这个二难推论的核心。

有比例交易成本或无交易成本的市场中，基本等价关系可由用于投资者的套利最大化问题的两种办法（线性规划的对偶问题，或Farkas’Lemma）的一种来得到。为了把这个等价关系扩展到有现实交易成本的市场中去，投资者的套利最大化问题变成非线性的。因此，上述两种方法均不能被直接应用。更糟糕的是，小投资者的交易成本清单缺乏凸性排除了直接使用凸规划。因此，证明有现实交易成本市场中的基本等价关系将采取两步。

第一步，回避线性规划和Farkas’Lemma，而是用更复杂的凸规划中的对偶理论（像 Garman and Ohlson(（1981）的假设）来证明对大投资者（交易成本关于每个证券交易数目是凸的）的基本等价关系。

第二步，是利用自然的假设：每个小的投资者的佣金清单等于或高于一些大的投资者的佣金清单，对于任何的交易来说。然后利用这个假设的几何推论立即把等价关系推广到小投资者。

然后探讨定价算子与交易成本函数形状之间的关系。Garman and Ohlson 的

另一个结论：有比例交易成本市场的均衡价格等于相对应的无交易成本市场的价格再加上一个特定的因子。同样也可扩展到有现实交易成本的市场中去。这个因子和交易成本结构之间的精确关系之后被确定了。Jaime Cuevas Dermody & Eliezer Z.Prisman（1993）讨论了市场交易中的投资者面临众多交易成本函数的原因和这些函数的含义。显然，如果在一个市场中，存在一个对那个市场中任意可能交易都有最低交易成本（在众投资者中）的特殊投资者，那么那个投资者没有套利机会当且仅当所有投资者（包括那个特殊投资者）的集合是空集。

1.2 研究的现实意义

现代金融理论对套利的研究就是对不能获得套利机会这一假定的含义的研究。这是因为在金融市场上,套利的出现是与均衡相矛盾的。无套利原理假设金融市场不存在套利机会。从理论上讲,由于实现这种策略的规模可以是任意的,因此只要存在套利机会,就意味着存在一个财富泵。 在 1923 年凯恩斯提出解释远期汇率的“利率平价说”中首次引入了无套利原理。无套利原理在众多理论中的广泛应用,使得基于无套利原理的无套利分析方法与均衡分析方法一道成为公司金融学的基本分析方法。无套利原理与风险中性假设也是紧密联系在一起的。当无风险套利机会出现的时候,所有的市场参与者就都会进行套利活动,而不管其对风险的厌恶程度如何。 无套利原理是现代金融理论的精髓。我们只有透过无套利原理,才能真正地理解和把握现代金融理论。

在新古典金融中，无套利资产定价理论是至关重要的。金融中最基本的一个结论是在无交易成本的市场中，无套利等价于存在一个价格算子。很多的现代价值理论及其应用都基于 Ross（1978）首先给出的这个基本等价关系。在金融工程的研究中,无套利分析被证明是非常重要的工具。套利通常定义为在无风险下的获利机会,在常态下,经济学家认为套利是不存在的(至少对任何一段时间来说它是不存在的),相应地,在数理金融的研究中,无套利假设就成为一个基本的原则。 在各种文献中,无套利越来越受到更多的关注,例如 Carassus,Pham 和 Touzi(2001)和 Ardalan(1999),Jouini 和 Kallar(1995),Prisman(1986),Li 和 Wang(2001)Deng、Li 和 Wang(2000)。在金融中一个重要的基础性的结果是无套利条件的等价性和在无交易成本市场价格系统中的存在性

(Ross,1978),Garmanand 和 Ohlson(1981)把该结果推广到成比例交易费用市场的情况,Dermody 和 Prisman(1993)进一步推广该结果到包括投资者市场影响和卖空费用的交易费的情况。我们思考一个有交易费（包括成比例的交易费、和买卖价差及税收等）的复杂摩擦市场。这些假设比之前的研究更贴近现实,另一方面,这些假设让交易函数变得更加复杂。

1.3 研究方法

在本文中，我们利用凸分析、线性规划、非线性规划等数学工具，对经典无套利理论进行了深入的分析研究，在不同的摩擦条件下对无套利进行了探索，所得结论更适用于现实金融市场的情形。 文章分析了包括无交易成本、有成比例交易费、和买卖价差及税收等条件下的无套利模型,运用优化理论和凸分析方法，得到一些等价条件；在复杂摩擦市场中研究了大和小两类投资者，并对定价算子和摩擦函数给予了一些说明。

1.4 研究特色与创新

虽然之前有关无套利的有趣的尝试收到了明显的可取的结构性见解,但是目前还不清楚 Harrison&Kreps（1979）的结论多大程度以及什么其他类别的市场摩擦可以推广。本文的创新之处在于给出了两种空间：局部凸拓扑空间以及可分 *Banach* 空间，并给出了它们上面的关于无套利和渐近无套利定理的一系列理论。另外，前一部分对以往的研究工作做了综述，之前并未有一篇详尽描述无套利资产定价定理发展进程的文章出现。此外，本文对渐近无套利也给出了在上述两种空间中的数理证明，这在之前是没有的。

1.5 本文的框架安排

本文分为以下六个部分：

第一部分：绪论。这一章介绍了本文的研究背景和现实意义，列出了本文的结构框架，指出本文的研究特色与创新之处。

第二部分：文献回顾。这一部分介绍了完美市场中的无套利且分析各基本等

价关系的证明；

第三部分：引入交易成本进入模型，并用几何结论来解释为什么以往的方法不能应用于这种情况。

第四部分：解释了现实交易成本的实质，说明了在这些成本下的基本等价关系，探索了交易成本函数图像和面对这些交易成本的投资者的价格算子之间的关系。

第五部分：用另一种方法建立数学模型，给出了两种空间：局部凸拓扑空间以及可分 *Banach* 空间，并讨论了有摩擦市场中这两种空间上的强或弱无套利成本系统以及渐近强或弱无套利成本系统。

第六部分：结论。对本文的研究作小结，并提出本文在研究过程中的不足，以及未来的研究方向。

第二章 完美市场中的无套利

这章考虑了完美市场（没有交易成本和税收的市场）的一个一期或有要求权模型。令 A=[a_{ij}]表示外生给定的$m \times n$证券收益矩阵，在那个市场中当状态j发生时。一个投资者持有多头，一单位证券i被支付$a_{ij} \geq 0$，当状态j发生时；否则为 0，对$i=1,2,...,m; j=1,2,...,n$。一个投资者持有空头，一单位证券i支付$a_{ij} \geq 0$当状态j发生；否则为 0，对$i=1,2,...,m; j=1,2,...,n$。（若符号被变成j表示无风险债券的收益日期，那么当前这篇论文的结果将应用于期限结构。）m维列向量$A_j=\left(a_{1j}, a_{2j}, ...a_{mj}\right)$是当状态$j$发生时或有要求权在$m$个证券上的支付。

令$x^{'}=\left(x_1, x_2..., x_m\right)^{'}$为行向量代表投资者的当前已完成交易的投资组合。每个x_i表示交易单位的量，$x_i>0$表示买入证券，$x_i<0$表示卖出证券，$i=1,2,...,m$。如果投资者卖出自己并不拥有的证券，那么这个投资者卖空这个证券用来交付。令$p=\left(p_1, p_2, ...p_m\right)$为市场中所有投资者所面临的证券价格向量。不难发现，在这篇论文中，所有的向量，当用于向量或矩阵乘法时，是列向量，除非它们用$^{'}$被标注为行向量，并且$x^{'}=0^{'}$是一个m维的 0 行向量，表示没有交易。

因此，一个投资者交易x，立即支付$x^{'}p$，日后当一些j发生时收到$x^{'}A_j=x_1a_{1j}+x_2a_{2j}+x_ma_{mj}$。这里不难发现，每一个$x^{'}p$和$x^{'}A_j$都可正可负可为 0.

无套利条件可被表示为：没有交易x满足以下两条性质：

有一个非正的成本，并且要求投资者在任意状态j没有正的收益

有一个负的成本，并且/或者投资者在一些状态j上提供正的未来收益。

用数学语言描述就是：没有交易x，使得$x^{'}p \leq 0, x^{'}A_j \geq 0$对所有的$j$成立，并且至少一个不等号严格成立。

这个定义可用于如下的投资者套利最大化问题。

定义：完美市场中的无套利被定义为：

⑴ $\max_x \left\{ -x'p \mid x'A \geq 0' \right\} = 0$ 和 $x^{*'}A = 0$ 对任意的最优解 x^*

同样有可能像 Prisman（1986）给出的那样用现值表示无套利，

⑵ $\exists$一个$d > 0, s.t. \max_x \left\{ -x'p + x'Ad \right\} = 0$

⑵ 中d的每一个n维分量d_j被解释为：\$1支付的当前价值（⑴的影子价格或拉格朗日算子乘数），即状态j发生的或有负债。假设这样的\$1在市场中被交易，那么，$\forall$满足⑵的d都是那些或有要求权的价格的一个可能集合，这个集合排除了套利机会。$\forall$不满足⑵的$d > 0$是存在一个有利的交易x使得$-x'p + x'Ad > 0$的这种价格的一个可能集合。

这种或有要求权交易的引入意味着价格d的一些集合。若⑵不成立，那么这个d将允许任何投资者：

（ i ）现在花$x'p$来买那个有利交易x

（ ii ）现在获得$x'Ad$，因为清偿状态相关未来收益$x'A$

（iii）因此获得一个净套利利润$x'Ad - x'p > 0$。

既然⑵仅要求至少存在一个$d > 0$满足等式，而⑴要求每个x都要满足等式，有人可能会想条件⑴比⑵要强。当引理 1 给出后会发现这是错误的。⑵中花括号中表示投资组合x的净现值的一种类型。这里净现值意思是x的负的当前成本和x的或有收益的贴现价值（d下）的总和。

线性规划的对偶理论推出无套利利润（如⑴定义）等价于：

（3）$\exists$一个$d > 0, s.t. Ad = p$

这个著名的结论首先由 Ross（1976）证明。但是在以往的文献中没有被发现⑵和（3）是等价的，而且也没有在没有线性性的条件下证明出$(2) \Rightarrow (1)$。

引理 2.1 存在一个等价算子可以推出无套利，即，$(2) \Rightarrow (1)$

⑵和（3）之间的关系有一个有趣的几何解释来说明为什么以前的大部分工作没有没有假设现实交易函数。考虑⑵的几何形状。因为在$x = 0$的可行解处⑵

中最大化问题消失，所以它至少为 0.这个和 max 的定义推出⑵等价于

（4）∃一个$d \gg 0, s.t. x^{'}\left(Ad-p\right) \le 0 \qquad \forall x$

定义超平面$h\left(x\right)=x^{'}\left(Ad-p\right)$，对所有的$x$，它非正即是$\left(4\right)$的限制条件。$\Delta\left(Ad-p\right)$是$h(\cdot)$的斜率，且在原点处支撑常值 0 函数（注：一个线性函数$h(\cdot)$在原点处支撑另一个（没必要为线性的）函数$g\left(\cdot\right)$，即是：$h(0)=g\left(0\right)$，且$h(x)\le g\left(x\right)$，对所有的x），即在原点处支撑退化的交易成本函数（完美市场中的）。这个超平面是线性函数$h\left(x\right)=x^{'}\left(Ad-p\right)$的图像。因为$h$是一个在$x^{'}=0^{'}$处消失的线性函数，所以，$h(x)\le 0 \ \Leftrightarrow$它的斜率为 0，即$Ad-p=0$，也就是$\left(3\right)$的条件。所以，$\left(3\right)\Leftrightarrow\left(4\right)$。

早先的研究已经避免了非比例交易成本的情形，因为它不能保持线性性，因此不能使用线性规划的对偶问题，或 Farkas’ Lemma 方法中的任何一种。替代以上方法，我们使用凸分析（同时利用假设每个小投资者的交易成本从不低于某些大投资者的交易成本）。

下节我们将给出在有非比例和非凸交易成本的现实市场中同样存在类似的超平面。那样，无套利$\Leftrightarrow$ ∃一个定价算子$d>0$ 的证明同样可以缩减为存在这样的一个支撑超平面。